

Die Testat besteht aus einer festgesetzten Zahl von Entscheidungsfragen, bei der eine Funktion  $f$  und eine Stelle  $x$  angegeben wird, an welcher  $f$  nicht definiert ist. Es ist zu entscheiden, ob eine nichtisolierte, eine wesentliche, eine hebbare Singularität oder eine Polstelle vorliegt. Ich gebe einige Beispiele, die Auflösung erfolgt eine Seite weiter. Zu bemerken ist generell, daß die nötigen Überlegungen denen zu Testat 1 ähneln.

- $f(z) = z + e^{\tan(z)}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ .
- $f(z) = \tan(z) + \tan(e^{1/z} + iz)$ ,  $x = 0$ .
- $f(z) = \frac{1 - \cos(2z)}{\sin(z)^2}$ ,  $x = 0$
- $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^{2010}}$ ,  $x = 0$ .
- $f(z) = \log(z^2 - 1)$ ,  $x = 1$ .
- $f(z) = \frac{e^z - 1}{\sin(z)}$ ,  $x = 0$ .
- $f(z) = \frac{\Re z}{\sin z}$ ,  $x = 0$ .

- $f(z) = z + e^{\tan(z)}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Es liegt eine wesentliche Singularität an dieser Stelle vor. Da die Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$  mit Ausnahme der halbzahligen Vielfachen von  $\pi$  holomorph ist, ist die Singularität sicher isoliert. Für  $t \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$  gilt  $\sin(t) \geq \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$  und  $\cos(t) = \sin(\frac{\pi}{2} - t) < \frac{\pi}{2} - t$ , also  $\tan(t) \geq \frac{1}{\pi - 2t}$  und

$$f(t) \geq \exp\left(\frac{1}{\pi - 2t}\right).$$

Auf Grund der bekannten Wachstumseigenschaften der Exponentialfunktion ist die für eine Polstelle schlimmstenfalls  $n$ -ter Ordnung (bzw. Hebbarkeit im Falle  $n = 0$ ) notwendige und hinreichende Bedingung

$$f(z) = O\left(\frac{1}{|\frac{\pi}{2} - z|^n}\right)$$

für jede natürliche Zahl  $n$  verletzt.

Übrigens ist zu Aufgabenstellungen dieser Art anzumerken, daß der Summand  $g(z) = z$  in einer Umgebung von  $z = x$  (sogar auf ganz  $\mathbb{C}$ ) holomorph ist. Die Addition derartiger Summanden beeinflußt also nicht die Frage, ob eine isolierte Singularität vorliegt, und auch nicht die für die übrigen Alternativen maßgeblichen Laurent-Koeffizienten  $f_n$  mit negativen  $n$ . Derartige Summanden werden also nur hinzugefügt, um den Ausdruck komplizierter erscheinen zu lassen und Verwirrung unter den Studenten zu stiften. Die Kunst des Lösen derartiger Aufgaben beinhaltet umgekehrt die Fähigkeit, derart „harmlose“ Summanden auf einen Blick zu erkennen.

- $f(z) = \tan(z) + \tan(e^{1/z} + iz)$ ,  $x = 0$ . Es liegt keine isolierte Singularität vor.

Auf Grund der Laurent-Entwicklung

$$g(z) = e^{1/z} + iz = iz + \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{n!z^n}$$

hat  $g(z)$  eine isolierte Singularität bei  $z = 0$ . Die Funktion  $f$  ist singulär an allen Stellen mit  $z = 0$  oder mit  $g(z) \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ . Nach dem großen Picardschen Satz gibt es unter den unendlich vielen Elementen von  $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$  höchstens eines, das nicht auf jeder beliebig kleinen Umgebung von 0 als Funktionswert von  $g$  auftaucht. Daher hat  $f$  Singularitäten  $z \neq 0$  beliebig nahe bei 0.

- $f(z) = \frac{1-\cos(2z)}{\sin(z)^2}$ ,  $x = 0$ . Die Singularität ist hebbar. In der Tat, wegen  $\cos(2z) = 1 - 2\sin(z)^2$  vereinfacht sich der Ausdruck zu  $f(z) = 2$ , wodurch eine auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion gegeben ist.

Allgemein ist für das Verhalten von Brüchen  $\frac{f}{g}$ , wobei  $f$  und  $g$  holomorph auf einer Umgebung von  $x$  sind und  $g$  nicht identisch verschwindet, die Nullstellenordnungen relevant: Im Fall  $f = 0$  ist die Singularität selbstverständlich hebbar, und andernfalls kann man nach unserem Beweis des Identitätssatzes kann Faktoren  $(z - x)^n$  auf  $f$  und  $g$  abspalten:

$$f(z) = (z - x)^a \tilde{f}(z) \quad g(z) = (z - x)^b \tilde{g}(z)$$

mit  $\tilde{f}(x) \neq 0$  und  $\tilde{g}(z) \neq 0$ . Die Zahlen  $a$  und  $b$  sind die Nullstellenordnungen von  $f$  und  $g$  an der Stelle  $x$  und können dadurch bestimmt werden, daß die Ableitungen  $f^{(j)}(x)$  für  $j < a$ , aber nicht  $j = a$  verschwinden und Analoges für  $g$  und  $b$  gilt.

Im Fall  $b > 0$  ist der Ausdruck an der Stelle  $x$  nicht definiert, und die Singularität ist hebbar für  $a \geq b$  und ein Pol der Ordnung  $b - a$  sonst.

- $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^{2010}}$ ,  $x = 0$ . Es liegt ein Pol der Ordnung 2008 vor.  
In der Tat, die Nullstellenordnung des Nenners ist 2010, die des Zählers ist 2, wie aus der Potenzreihenentwicklung

$$e^z - 1 - z = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

ersichtlich ist.

- $f(z) = \log(z^2 - 1)$ ,  $z = 1$ . Es liegt keine isolierte Singularität vor.

Da wir den Hauptzweig des Logarithmus zugrundegelegt haben, springt der Imaginärteil von  $f$  an Stellen  $x \in (0, 1)$  zwischen  $-\pi$  und  $\pi$ . Genauer gesagt gilt

$$\begin{aligned} \lim_{y \downarrow 0} \log((x + iy)^2 - 1) &= \log(1 - x^2) + i\pi \\ \lim_{y \uparrow 0} \log((x + iy)^2 - 1) &= \log(1 - x^2) - i\pi \end{aligned}$$

für derartige  $x$ . Also ist  $f$  auf keiner Umgebung von 0 stetig und 0 keine isolierte Singularität.

- $f(z) = \frac{e^z - 1}{\sin(z)}$ ,  $x = 0$ . Die Singularität ist hebbar.

In der Tat, die Funktionswerte von Zähler und Nenner bei  $x = 0$  sind beide 0, die der Ableitungen von Zähler und Nenner

beide 1. Zähler und Nenner haben also die Nullstellenordnung 1 an der zu untersuchenden Stelle.

- $f(z) = \frac{\Re z}{\sin z}$ ,  $x = 0$ . Es liegt keine isolierte Singularität vor.  
Wäre nämlich  $f$  für irgendein  $\varepsilon > 0$  holomorph auf  $\{z \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$ , so wäre dort auch  $\Re(z) = f(z) \sin(z)$  holomorph, obwohl die Funktion nicht lokal konstant ist und reelle Funktionswerte hat.