Das Testat besteht aus einer festgesetzten Zahl von Entscheidungsfragen des folgenden Typs: Zu finden ist die schärfste der folgenden drei Holomorphieeigenschaften, die eine Funktion haben kann:

- Holomorphie auf ganz $\mathbb{C}$.
- Holomorphie auf $\mathbb{C}$ mit Ausnahme einer diskreten Ausnahmemenge.
- Holomorphie auf einer offenen dichten Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Offenbar ist jede dieser Eigenschaften schwächer als die vorher genannte. Es besteht auch die Möglichkeit, daß f keine dieser Eigenschaften hat, etwa für $f(z) = \Re z$. Es besteht also die Wahl zwischen vier Möglichkeiten. Diese muß für eine richtige Lösung nicht begründet, sondern nur richtig getroffen werden.

Komplexe Zahlen, für die der Ausdruck nicht wohldefiniert ist, durch welchen wir die Funktion beschreiben, sollen stets zur Ausnahmemenge gezählt werden.[1]. Da Holomorphie nur für Funktionen definiert wurde, die auf offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ definiert sind, sind auch Häufungspunkte dieser Menge zu der Ausnahmemenge zu zählen.

Wir geben einige Beispiele, die Auflösung erfolgt eine Seite weiter. Mit log wird der Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet.

- $\sin(e^z)$.
- $\sin(\tan(z))$.
- $z + \tan(1/z)$.
- $\exp\big(\sin(z)\big) + \exp(-|z|^2)$.
- $\exp\big(\tan(1/z)\big)$.
- $\exp(\Re z) + \tan(1/z)$.
- $\sin(e^z + z^2)$.
- $\tan\big(\frac{1}{1+z^2}\big)$.
- $\log(1 + e^z)$.

Die folgenden Beispiele sind etwas schwieriger, da wir für die Begründung der Entscheidung verschiedene Fakten benutzen, die erst später in der Vorlesung eingeführt werden. Derartige Aufgaben werden also in der ersten Auflage des Testates noch nicht gestellt.

- $\frac{e^z}{e^{4z}+e^z+1}$.
- $\frac{1}{\sin\left(e^{1/z}+\cos(z)\right)}$.
- $\tan\left(\frac{z}{z^{2010}+z^{2009}+2008}\right)$.

[1]Wir kümmern uns hier also noch nicht um den funktionentheoretischen Begriff der „hebbaren Singularität“. Um Mißverständnisse über diesen Punkt auszuschließen, wollen wir aber ohnehin keine Testataufgaben produzieren, für die Stellen der Undefiniertheit des Ausdruckes hebbare Singularitäten der Funktion sind.

- $\log(z^{2010} + z)$.

Die meisten erfahrenen Mathematiker würden derartige Fragen zunächst intuitiv entscheiden und sich erst dann im Bedarfsfall die genaue Begründung überlegen. Ziel des Testates ist sicher auch die Entwicklung derartiger intuitiver Fähigkeiten. Auf der anderen Seite ist es wichtig, sich im Bedarfsfall genaue Begründungen zu überlegen, gerade auch um intuitiv getroffene Fehlentscheidungen zu vermeiden. Die Entscheidungen der obigen Beispielfragen sollen daher relativ penibel begründet werden. Dabei gibt es oft mehrere mögliche Begründungen. Ich habe versucht, diese so auszuwählen, daß eine Reihe häufig möglicher Vorgehensweisen vorgestellt wird.

Unter einer ganzen analytischen Funktion versteht man eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

- $\sin(e^z)$. Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

  In der Tat, sin und exp sind ganze analytische Funktionen, und nach der Kettenregel gilt das auch für ihre Verknüpfung.
- $\sin(\tan(z))$. Die Funktion ist holomorph mit Ausnahme einer diskreten Teilmenge von $\mathbb{C}$.

  In der Tat, die Funktion sin ist ganz analytisch. Nach der Kettenregel ist $\sin\bigl(\tan(z)\bigr)$ holomorph auf jeder offenen Teilmenge, auf der tan holomorph ist. Dies ist auf ganz $\mathbb{C} \setminus \bigl(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\bigr)$ der Fall. Die Ausnahmemenge $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ ist diskret, auf ihr ist der zu betrachtende Ausdruck nicht definiert.
- $z+\tan(1/z)$. Die Funktion ist holomorph auf einer offenen dichten Teilmenge von $\mathbb{C}$.

  Offenbar ist $\tan(1/z)$ holomorph auf der Menge aller z mit $z \neq 0$ und $1/z \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Da der erste Summand (also z) eine ganze analytische Funktion ist, ist die Summe analytisch außerhalb der Ausnahmemenge $\{0\} \bigcup \bigl\{ \frac{2}{(2n+1)\pi} \bigm| n \in \mathbb{Z} \bigr\}$, auf welcher der zu betrachtende Ausdruck nicht definiert ist. Diese (abgeschlossene) Ausnahmemenge ist nicht diskret, denn sie hat 0 als Häufungspunkt. Ihr Komplement ist aber dicht in $\mathbb{C}$, denn sie enthält nur Zahlen mit $\Im(z) \neq 0$, so daß man zu jeder komplexen Zahl durch geringfügiges Stören des Imaginärteiles beliebig gute Approximationen finden kann, die der Ausnahmemenge nicht angehören.
- $\exp\bigl(\sin(z)\bigr) + \exp(-|z|^2)$. Die Funktion ist auf keiner offenen dichten (in Wahrheit sogar auf keiner offenen nichleeren) Teilmenge von $\mathbb{C}$ holomorph.

  In der Tat, nach der Kettenregel und der Holomorphie von exp und sin ist der erste Summand eine ganze analytische Funktion. Wäre $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer und $f(z) = \exp\bigl(\sin(z)\bigr) + \exp(-|z|^2)$ holomorph auf Ω, so wäre also auch $\exp(-|z|^2) = f(z) - \exp\bigl(\sin(z)\bigr)$ holomorph auf Ω. Da diese Funktion reellwertig ist, müßte sie nach dem in der Vorlesung (Folgerung 1 aus Satz 1.2.2) Gezeigten lokal konstant sein, was aber offenbar nicht der Fall ist.
- $\exp\bigl(\tan(1/z)\bigr)$. Die Funktion ist auf einer offenen dichten Teilmenge von $\mathbb{C}$ holomorph.

In der Tat, die Ausnahmemenge ist dieselbe wie beim vorletzten Beispiel, also

(1) $$A = \{0\} \bigcup \{\frac{2}{(2n+1)\pi}\}$$

Außerhalb dieser Menge ist die Funktion nach der Kettenregel holomorph, und auf A ist der betrachtete Ausdruck nicht definiert.

- $\exp(\Re z) + \tan(1/z)$. Die Funktion ist auf keiner offenen dichten (sogar auf keiner offenen nichtleeren) Teilmenge von $\mathbb{C}$ holomorph.

  In der Tat, wäre die Funktion holomorph auf der offenen Teilemenge $\Omega \neq \emptyset$, so wäre $f(z) = \exp(\Re z)$ holomorph auf $\Omega \setminus A$, mit der durch (1) gegebenen Menge A, außerhalb derer die Funktion $\tan(1/z)$ nach der Kettenregl und den Holomorphieeigenschaften des tan holomorph ist. Da das Komplement von A dicht in $\mathbb{C}$ ist, ist auch $\Omega \setminus A$ nicht leer. Da die Funktion f reellwertig und nicht lokal konstant ist, kann sie auf $\Omega \setminus A$ nicht holomorph sein.
- $\sin(e^z + z^2)$. Die Funktion ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$.

  In der Tat, nach der Kettenregel liegt eine ganze analytische Funktion vor.
- $\tan\left(\frac{1}{1+z^2}\right)$. Die Funkion ist holomorph auf einer offenen dichten Teilmenge von $\mathbb{C}$.

  Die Ausnahmemenge ist

$$\{\pm i\} \cup \left\{\pm i\sqrt{1 - \frac{2}{(2n+1)\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}\right\}$$

  und hat $\pm i$ als Häufungspunkte. Sie ist also nicht diskret. Da ihre Elemente durch jede Störung des Realteiles die Ausnahmemenge verlassen, ist ihr Komplement dicht.
- $\log(1+e^z)$. Die Funktion ist auf einer offenen dichten Teilmenge von $\mathbb{C}$ holomorph.

  Die Ausnahmemenge ist

$$B = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \Re(z) \geq 0 \text{ und } \Im(z) \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}\right\}.$$

  Außerhalb dieser Ausnahmemenge ist $f(z) = \log(1 + e^z)$ in der Tat nach den Holomorphieeigenschaften der Exponentialfunktion und des Hauptzweiges des Logarithmus holomorph. Da jedes Element der Ausnahmemenge durch Störungen um < 1 des Imaginärteiles diese verläßt, ist ihr Komplement dicht. Da jeder Punkt von B Häufungspunkt von B ist, ist sie nicht diskret.

Zu begründen ist aber noch, warum f wirklich auf keiner größeren offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ holomorph ist. Mit Ausnahme der ungeradzahligen Vielfachen von πi ist f ja an den Elementen von B durchaus wohldefiniert. Angenommen, $z_o \in B$ und $\Re z_o > 0$ (so daß f auf einer Umgebung von z_o wohldefiniert ist). Dann ist $1 + e^{z_o}$ reell und negativ, also $\Im f(z_o) = \pi$. Der Imaginärteil von $1 + \exp(z_o + i\varepsilon)$ ist für genügend kleine $\varepsilon > 0$ ebenso wie der Realteil negativ, und $\lim_{z \to z_o} \Im\big(1 + e^z\big) = 0$. Es folgt $\lim_{\varepsilon \uparrow 0} \Im f(z_o + i\varepsilon) = -\pi$, aber $\Im f(z_o) = \pi$. Also ist f an der Stelle z_o unstetig und damit auch nicht komplex differenzierbar.

Die Diskussion der folgenden Beispiele ist etwas komplizierter und nutzt zum Teil Fakten, die aus der Vorlesung noch nicht bekannt sind. Derartige Beispiele sind also in der ersten Auflage des Testattypes noch nicht zu erwarten.

- $\frac{e^z}{e^{4z}+e^z+1}$. Die Funktion ist holomorph außerhalb einer diskreten Teilmenge von $\mathbb{C}$.

  In der Tat, die Ausnahmemenge ist die Menge der Nullstellen des Nenners. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat das Polynom $P(\zeta) = \zeta^4 + \zeta + 1$ vier komplexe Nullstellen $\zeta_1, \ldots, \zeta_4$,[2] unter denen die 0 offenbar nicht vorkommt. Sei $\lambda_j = \log(\zeta_j)$. Die (offenbar nichtleere) Ausnahmemenge ist dann

  $$\big\{\lambda_j + 2\pi i k \;\big|\; 1 \le j \le 4, k \in \mathbb{Z}\big\}.$$

  Sie ist diskret, weil sie aus jedem Kreis vom Radius 1 höchstens vier Punkte enthält.
- $\frac{1}{\sin\left(e^{1/z}+\cos(z)\right)}$. Die Funktion ist holomorph auf einer offenen dichten Teilmenge von z.

  Die Ausnahmemenge A besteht aus 0 sowie aus allen komplexen Zahlen z mit $g(z) = \sin\big(e^{1/z} + \cos(z)\big) = 0$. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen ist 0 der einzig mögliche Häufungspunkt von $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sin\big(e^{1/z} + \cos(z)\big) = 0\right\}$, denn wenn $g(z)$ in einer Umgebung eines solchen Häufungspunktes z holomorph wäre (was mit Ausnahme von $z = 0$ der Fall ist), so müßte g nach dem Identitätssatz identisch verschwinden (denn $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist zusammenhängend), was aber offenbar nicht der Fall ist (zB. wegen $\lim_{n \to -\infty} g(2\pi n) = \sin(1) \neq 0$).

[2] Man kann sich überlegen, daß in diesem Fall in der Tat keine Doppelnullstellen vorliegen können. Die obige Diskussion würde sich aber ohnehin nicht ändern, wenn die Folge $\zeta_1, \ldots, \zeta_4$ nicht wiederholungsfrei wäre.

Die Ausnahmemenge hat also höchstens 0 als Häufungspunkt und ist daher dicht.[3]

Wir müssen uns noch davon überzeugen, daß 0 in der Tat ein Häufungspunkt der Ausnahmemenge und diese damit nicht diskret ist. Dazu müßte man verifizieren, daß es beliebig nahe an 0 komplexe Zahlen z gibt, für die $h(z) = e^{1/z} + \cos(z)$ ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Man kann dazu einfach das Verhalten von $h(z)$ für reelle $z \downarrow 0$ studieren und den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen anwenden. Andererseits wird von Ihnen nur verlangt, die richtige Alternative zu wählen, ohne daß ein Preis für eine möglichst elementare Begründung vergeben wird. Eine andere Möglichkeit ist daher, einfach schwere Geschütze aufzufahren und den Großen Picardschen Satz zu zitieren:

> Wenn h eine auf einer Umgebung von $z_o \in \mathbb{C}$ mit Ausnahme von z_o selbst holomorphe Funktion ist, die eine wesentliche Singularität an der Stelle z_o hat, so gibt es eine komplexe Zahl a, so daß alle Elemente von $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ in jeder Umgebung von z_o als Funktionswerte von h auftreten.

Im vorliegenden Fall hat $h(z) = e^{1/z} + \cos(z)$ eine wesentliche Singularität bei 0, so daß von den Zahlen πn mit $n \in \mathbb{Z}$ höchstens eine nicht in jeder beliebig kleinen Umgebung von 0 als Funktionswert von h auftaucht und die Ausnahmemenge A in der Tat von 0 verschiedene Elemente beliebig nahe bei 0 hat.[4]

- $\tan\left(\frac{z}{z^{2010}+z^{2009}+2008}\right)$. Die Funktion ist holomorph auf einer offenen dichten Untermenge von $\mathbb{C}$.

  Die Ausnahmemenge besteht aus den folgenden paarweise disjunkten Mengen:

  A den (endlich vielen) komplexen Zahlen z, für die das Polynom im Nenner verschwindet, sowie

  B_n den komplexen Zahlen, für die ganze Zahl n mit $\frac{z}{z^{2010}+z^{2009}+2008} = \frac{2n+1}{2}\pi$ existiert.

---

[3]Eine andere Argumentation zu demselben Schluß besteht einfach darin, daß (wie in der Vorlesung gezeigt wird) eine holomorphe Funktion auf einer zusammenhängenden Teilmenge von $\mathbb{C}$ identisch verschwindet oder höchstens abzählbar viele Nullstellen hat. Die Ausnahmemenge ist daher abzählbar und ihr Komplement dicht in $\mathbb{C}$, siehe die Argumentation zum nächsten Beispiel. Es ist für derartige Diskussionen charakteristisch, daß mehr als ein Weg zum Ziel führen kann.

[4]Wobei mit der Anwendung des Großen Picardschen Satzes auf dieses Beispiel in der Tat mit Kanonen auf Spatzen geschossen wird, aber sehr wohl auch Beispiele auftreten könnten, für die ein solches Argument das bequemste ist.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist A nichleer und endlich, und nach aus demselben Grund sind auch alle Mengen B_n nichtleer und endlich, denn es handelt sich um die Lösungsmengen von

$$z^{2010} + z^{2009} - \frac{2}{(2n+1)\pi} z + 2008 = 0.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{z}{z^{2010}+z^{2009}+2008} = 0$ ist die Ausnahmemenge $E = A \cup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} B_n$ offenbar beschränkt. Um sich von der Abgeschlossenheit zu überzeugen, sei z_k eine Folge von Elementen von E mit Limes z, wir müssen $z \in E$ zeigen. Durch Streichen der Wiederholungen kann man die Folge als wiederholungsfrei voraussetzen, den bei unendlich oftmaliger Wiederholung eines Folgengliedes k wäre dieses der Limes und der Limes damit in E. Da A endlich ist, dürfen wir die zu A gehörenden Folgenglieder streichen. Es gilt dann $z_k \in B_{n_k}$, und auf Grund der Endlichkeit der B_n gilt $\lim_{n\to\infty} B_{n_k} = 0$. Dann muß aber $z \in A \subseteq E$ sein, denn sonst würde $\frac{z_k}{z_k^{2010}+z_k^{2009}+2008}$ gegen $\frac{z}{z^{2010}+z^{2009}+2008}$ konvergieren und bliebe beschränkt.

Also ist E in der Tat abgeschlossen. Da E als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen abzählbar ist, ist das Komplement von E dicht in E, denn jede Umgebung jeder komplexen Zahl ist überabzählbar und kann daher nicht nur aus Elementen von E bestehen. Auf der anderen Seite kann E nicht diskret sein, denn E ist beschränkt und unendlich und hat daher nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß Häufungspunkte.

- $\log(z^{2010} + z)$. Die Funktion ist holomorph auf einer offenen dichten Teilmenge von $\mathbb{C}$.

  Die Ausnahmemenge A besteht aus allen komplexen Zahlen z, für die $z^{2010}+z$ reell und ≤ 0 ist. Da sie $(-\infty, -1]$ enthält und diese Menge Häufungspunkte hat, ist nur noch auszuschließen, daß $\mathbb{C} \setminus A$ nicht überall dicht ist. Wäre dies der Fall, so gäbe es eine nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$, die in A enthalten ist. Die holomorphe Funktion $z^{2010} + z$ wäre dann rellwertig auf U und damit lokal konstant, was aber nicht der Fall sein kann, denn ein nichtkonstantes Polynom nimmt jeden Funktionswert nur endlich oft an.

  Für die Lösungen von $z^{2010} + z = 0$ ist der betrachtete Ausdruck gar nicht definiert. Um zu sehen, daß an den anderen Elementen z der Ausnahmemenge keine Holomorphie eintreten kann, kann man zum Beispiel den Satz über die Invarianz des

Gebietes ausnutzen, wonach auf jeder Umgebung von z das Polynom $z^{2010} + z$ auch Funktionswerte mit negativem Realteil und Imaginärteil $-\varepsilon$ für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ annimmt. Der Imaginärteil des Logarithmus springt also von Werten beliebig nahe bei $-\pi$ beliebig nahe bei z auf π an der Stelle z, es liegt also sogar Unstetigkeit vor.