Analysis 2

21.06.2018
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 05.07.2018 in der Vorlesung

Übungsblatt 11

Aufgabe 1: **6 + 4 = 10 Punkte**

Sei $R > 0$. Wir definieren $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ durch die Parametrisierung

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{pmatrix} \cosh(u)\cos(v) \\ \cosh(u)\sin(v) \\ u \end{pmatrix} : \; u \in (-R, R), \; v \in (-\pi, \pi) \right\}.$$

Hier ist cosh der aus der Analysis 1 bekannte Cosinus Hyperbolicus.

(a) Begründen Sie zunächst aufgrund der konkreten Parametrisierung, welche geometrische Form $\mathcal{M}$ hat, und fertigen Sie eine Skizze der Menge in einem dreidimensionalen Koordinatensystem an[1].

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 2: **3 + 3 + 4 = 10 Punkte**

Sei $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall ($a < b$), $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon I \times U \to \mathbb{R}$ stetig.

(a) Angenommen, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in U mit $y_k \to c \in U$, $k \to \infty$. Wir definieren $f_k\colon I \to \mathbb{R}$ durch $f_k(x) := f(x, y_k)$. Zeigen Sie, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf I gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert und bestimmen Sie diese.

(b) Wir definieren die Funktion $\Phi\colon U \to \mathbb{R}$ durch

$$\Phi(y) := \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x, \qquad y \in U.$$

Zeigen Sie, dass $\Phi\colon U \to \mathbb{R}$ stetig ist.

(c) Angenommen, $U := [c, d] \subset \mathbb{R}$ ist ebenfalls ein kompaktes Intervall ($c < d$). Sei weiters $y \mapsto f(x, y)$ für jedes $x \in I$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann die in (b) definierte Funktion Φ stetig differenzierbar in U ist und geben Sie mit Beweis eine Formel für ihre Ableitung in Abhängigkeit von f an.

Aufgabe 3: **10 Punkte**

Bestimmen Sie eine Lösung x der Differentialgleichung

$$(2t + 4x + 2)\,\mathrm{d}t + (4t + 12x + 8)\,\mathrm{d}x = 0, \quad x(0) = -1$$

auf einem geeigneten $t = 0$ enthaltenden Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

---

[1] Dies bedeutet insbesondere, dass Sie zur Lösung dieser Aufgabe *kein* Computeralgebraprogramm oder andere technische Hilfsmittel zum Plotten verwenden sollen.

Aufgabe 4: **3 + 4 + 3 = 10 Punkte**

Bestimmen Sie für die nachfolgenden PFAFFschen Formen $\omega \in \Lambda_1^1(\mathbb{R}^2)$ jeweils Stammfunktionen oder beweisen Sie, dass es keine gibt:

(a) $\omega = x^2 y \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}y$,

(b) $\omega = (1 + e^{y-x})^{-1} \, \mathrm{d}x + (1 + e^{x-y})^{-1} \, \mathrm{d}y$.

Bestimmen Sie letztlich, ob es ein Vektorfeld $F \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^3)$ gibt mit

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ \cos(z)\sin(x) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } (x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3.$$